Exercices de pré-rentrée en Math Sup

1. Soient x, y des réels positifs. Montrer que
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$
avec égalité si et seulement si $x = y$.
2. Mettre sous forme canonique le trinôme $ax^2 + bx + c$.
3. Soient x', x'' les racines de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$. Exprimer $x' + x''$ et $x'x''$ puis $\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''}$ et $(x' - x'')^2$ en fonction de a, b, c.
4. Résoudre *de tête* les équations
   (a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
   (b) $x^2 + 18x + 77 = 0$
   (c) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$
5. f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a et l sont deux réels. Donner, *avec des quantificateurs*, la définition de
$$\lim_{x\to a} f(x) = l;\ \lim_{x\to a} f(x) = +\infty;\ \lim_{x\to -\infty} f(x) = l;\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$
6. Soient f et g deux fonctions réelles telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < g(x)$. On suppose que ces deux fonctions admettent des limites en $+\infty$. Comparer
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ et } \lim_{x\to+\infty} g(x)$$
7. Parmi les symboles suivants quels sont ceux qui représentent une forme indéterminée ? Que valent les autres ?
$$\frac{0}{+\infty}\ ;\ \frac{1}{+\infty}\ ;\ \frac{-\infty}{+\infty}\ ;\ \frac{-\infty}{1}\ ;\ \frac{-\infty}{0^-}\ ;\ \frac{0^+}{0^-}\ ;\ \frac{0^+}{1^-}\ ;\ (+\infty) - (+\infty)\ ;\ (+\infty) \times (-\infty)\ ;\ 0^+ \times (+\infty)\ ;\ 1^{+\infty}.$$
8. Les limites suivantes existent-elles. Si oui, les calculer.
   (a)
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 1} - x.$$
   (b)
$$\lim_{x\to1} (x-1)^2 \sin(\frac{1}{x-1}).$$
   (c)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}.$$
   (d)
$$\lim_{x\to+\infty} x \sin(\frac{1}{x}).$$
   (e)
$$\lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{\pi x}.$$
   (f)
$$\lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n})^n.$$
   (g)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

(h)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^4+1)}{x}.$$
(i)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{x}.$$
(j)
$$\lim_{x \to 0^+} x^x.$$
(k)
$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}.$$
(l)
$$\lim_{x \to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1).$$

9. Définir le nombre dérivé d'une fonction en un point.
10. Soit f une fonction dérivable en un point $a \in \mathbb{R}$. Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a.
11. Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée :

(a)
$$x \mapsto \ln[(x-1)(x^2+1)(3x+1)]$$
(b)
$$x \mapsto \sin(\frac{1}{e^{2x}+1})$$
(c)
$$x \mapsto x^3 \cos(5x+1)$$
(d)
$$x \mapsto e^{\cos x}$$
(e)
$$x \mapsto x \ln x - x$$
(f)
$$x \mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}}$$
(g)
$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

(où a, b, c, d sont des réels fixés.)

12. Soient a un réel non nul, f la fonction :
$$x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2$$
et x_1, x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$. Montrer que la tangente au graphe de $f$au point d'abscisse $\frac{x_1+x_2}{2}$ est parallèle à la droite joignant les points du graphe de f d'abscisses x_1 et x_2.
13. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème de la bijection, le théorème « des gendarmes »
14. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Donner l'expression de la primitive de f qui s'annule au point a.
15. Enoncer le théorème de Chasles pour les intégrales.
16. Définir la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.

17. Soit n un entier naturel. Calculer
$$\int_1^e x^n \ln x \, dx$$

18. Calculer les intégrales
$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx \ ; \ \int_0^{\pi/2} \sin(x+\frac{\pi}{4}) \, dx \ ; \ \int_{-3}^{3} (12x^{17}+2x^3-x) \, dx \ ; \ \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx \ ; \ \int_0^{\pi/4} \sin 2x \, e^{\sin^2 x} \, dx$$
$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{1+\cos x} \, dx \ ; \ \int_{-3}^{3} \sqrt{9x^2-x^4} \, dx \ ; \ \int_0^{\pi/6} \sin^3 x \cos^3 x \, dx \ ; \ \int_{-1}^{2} (1-|x-1|)^n \, dx$$

19. Montrer par récurrence (en rédigeant soigneusement) que pour tout entier strictement positif n :
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

20. Montrer par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$$

21. (Suite de Fibonacci). Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par
$$F_0 = 1, \ F_1 = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$
Posons
$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$
   (a) Ecrire une équation du second degré dont α, β sont les solutions.
   (b) Montrer par récurrence (en utilisant cette équation) que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

22. Donner la définition de deux suites adjacentes et énoncer le théorème du cours concernant de telles suites.
23. Enoncer le théorème de convergence monotone des suites réelles.
24. Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout n par $u_n = f(n)$. Que peut-on dire sur la monotonie de la suite (u_n) ?
25. Même question si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par la donnée de u_0 et pour tout n par $u_{n+1} = f(u_n)$.
26. Calculer
$$\sum_{k=19}^{137} 3 \times (2)^k \text{ et } \sum_{k=19}^{137} (3+2k)$$
27. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$ par $u_n = 3u_{n-1} + 2$. Déterminer la limite éventuelle de (u_n).
28. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$
Montrer, par « télescopage », que $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.
29. Résoudre l'équation $z^2 = 3 + 5i$, $z \in \mathbb{C}$.

30. Soit $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{1\}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que $\frac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur.
31. Enoncer les formules d'Euler et de De Moivre.
32. Calculer pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.
33. Module et argument de $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.
34. Calculer
$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$$
35. Calculer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$, $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$, $\tan 3x$ en fonction de $\tan x$.
36. Par quelles méthodes utilisant les complexes peut-on prouver que trois points du plan sont alignés ?
37. Quelle est l'image de la droite d'équation $x + y - 3 = 0$ et du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 9 = 0$ par la transformation d'expression complexe $z' = iz - 4$?
38. L'espace est rapporté à un repère orthonormé. On considère les quatre points
$$A(1,2,3)\ ;\ B(0,0,4)\ ;\ C(-1,1,0)\ ;\ D(0,1,2).$$
Donner une équation du plan $P = (ABC)$, des équations paramétriques de la droite (AB), la distance du point D au plan P, les coordonnées du projeté orthogonal H de D sur P.
39. Calculer $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos a, \cos b, \sin a, \sin b$ et $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a, \tan b$.
40. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi \mod 2\pi$. Calculer $\cos x, \sin x, \tan x$ en fonction de $t = \tan\dfrac{x}{2}$.
41. Résoudre *de tête* le système d'inconnues x, y :
$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$
42. Calculer $\cos p + \cos q$, $\cos p - \cos q$, $\sin p + \sin q$, $\sin p - \sin q$ en fonction de $\sin(\dfrac{p+q}{2}), \sin(\dfrac{p-q}{2}), \cos(\dfrac{p+q}{2}), \cos(\dfrac{p-q}{2})$.
43. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer
$$\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta}{2^k}$$
En déduire
$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin\theta}{\theta}$$
Montrer que cette formule est encore vraie quand $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.
44. 1% des individus d'une population sont atteints d'une certaine maladie, qu'on cherche à dépister à l'aide d'un test. Si un individu est malade, le test indiquera qu'il est sain dans 0,5% des cas. S'il est sain, le test indiquera qu'il est malade dans 1,5% des cas. Un individu est indiqué comme malade par le test ; quelle est la probabilité qu'il soit réellement malade ? Comment expliquer simplement ce résultat ?
45. Qu'est-ce qu'une probabilité conditionnelle ?
46. Quelle est l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres 25 et 0,1 ? Quelle est sa variance ?
47. A quelle condition la matrice réelle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Quelle est alors son inverse ?
48. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $16x - 3y = 4$.
49. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11.
50. Résoudre l'équation $25x^2 - 60xy + 5y^2 = 32$ dans $\mathbb{Z}$?